10 Fonction exponentielle

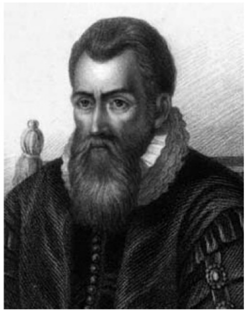
Manuel "Repères" p.114.

Objectifs :

- Définir la fonction exponentielle : fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et valant 1 en 0.
- Connaître et savoir utiliser son sens de variation, sa représentation graphique et ses limites
- Savoir utiliser l'équation $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$ pour transformer une écriture

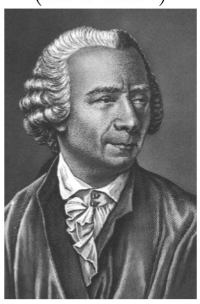
Aperçu historique :

La naissance de la fonction exponentielle est le fruit d'un long murissement qui n'aboutit qu'à la fin du XVIIe siècle. L'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est très ancienne (qu'y a-t-il par exemple entre 3^4 et 3^5 ?). On trouve dans les mathématiques babyloniennes un problème d'intérêts composés où il est question du temps pour doubler un capital placé à 20% conduisant à une interpolation linéaire pour fournir un nombre d'années égal à $3\frac{47}{60}$ .... Plus récemment, NICOLE ORESME *dans son De proportionibus (vers 1360) introduit des puissances fractionnaires (comme $3^{\frac{1}{2}}$ pour $\sqrt{3}$), et* MICHAEL STIFEL, *dans son Arithmetica integra (1544) met en place les règles algébriques sur les exposants entiers, négatifs et même fractionnaires.*
Dans deux lettres que NEWTON *envoie à Leibniz en 1676, on a l'apparition en exposant d'une expression littérale fractionnaire, de sa signification et du développement du binôme correspondant, puis la première apparition d'une expression contenant un exposant irrationnel. Cependant Newton n'en donne aucune définition ni calcul approché. Puis* LEIBNIZ *s'empare de ce concept et présente pour la première fois en 1678 un exposant variable (« gradus indefinitus ») dans une expression x^y qui devient pour lui le premier modèle d'expression transcendante.* [a]
En étudiant ces fonctions que l'on dira exponentielles car la variable est placée en exposant, on montre (nous détaillerons cela dans l'étude des logarithmes) qu'une telle fonction est égale à sa dérivée.



John Napier (1550-1617)

Christian Huygens (1629-1695)



Leonhard Euler (1707-1783)

---

a. Descartes avait défini comme "algébriques" les fonctions $y = f(x)$ ou $F(x; y) = 0$ qui peuvent être exprimées comme des polynômes en x et en y. Les autres fonctions ont été appelées "transcendantes par Leibniz.

1. Introduction

A. Loi de désintégration radioactive

En physique, l'expérience a montré que le nombre de noyaux d'une source radioactive diminue au cours du temps. On ne peut pas prévoir la date de désintégration d'un noyau donné mais on peut considérer que dans une population macroscopique de noyaux radioactifs, la probabilité qu'un noyau se désintègre pendant une unité de temps est la même pour des noyaux identiques et reste inchangée au cours du temps (c'est-à-dire qu'un noyau de vieillit pas : ce n'est pas parce qu'il ne s'est pas désintégré au cours d'un temps plus ou moins long que la probabilité qu'il se désintègre augmente). La probabilité de désintégration est notée λ ; c'est une caractéristique du type de noyaux. Elle est appelée constante radioactive du noyau.
Au cours d'une expérience de désintégration de noyaux radioactifs, on note $N(t)$ le nombre de noyaux restants à l'instant t .
Au cours d'une unité de temps on a donc environ $\lambda \times N(t)$ noyaux qui se désintègrent. Ainsi, en considérant l'approximation comme une égalité, on a :

$$N(t+\Delta t) = N(t) - \lambda \times N(t)\Delta t$$

Donc, en notant $\Delta N(t)$ la variation $N(t+\Delta t) - N(t)$, on a :

$$\Delta N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$$

Et donc finalement :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

Dans le membre de gauche on a un taux de variation ; si on fait tendre Δt vers 0 on obtient l'équation [1] $N'(t) = -\lambda \times N(t)$; équation que les physiciens écrivent $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)$.

B. Résolution de l'équation différentielle $y' = y$

Partons à la recherche d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et en prenant comme condition initiale $f(0) = 1$.
Nous avons obtenu en activité, grâce à la méthode d'Euler [2], une courbe approchée d'une solution à cette équation différentielle. Nous admettrons que cette courbe est la représentation de la fonction exponentielle qui est solution du problème posé. Ainsi, nous avons le :

Théorème 10.1 L'équation différentielle $y' = y$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Démonstration (de l'unicité) ; **ROC : Démonstration à savoir refaire**
Soit f une solution (on a admis l'existence d'une telle solution). Montrons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)f(-x) = 1$. Soit $h : x \mapsto f(x)f(-x)$. Montrons que h est constante. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car f l'est), et pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0 \text{ car } f' = f$$

Donc h est constante et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = h(0) = f(0)f(-0) = 1 \times 1 = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)f(-x) = 1$. On en déduit au passage que pour tout x, $f(x) \neq 0$. Supposons maintenant qu'il existe une autre solution, notée g, à l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$. Définissons alors la fonction $p : x \mapsto f(-x)g(x)$ sur $\mathbb{R}$. La fonction p est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a :

$$p'(x) = -f'(-x)g(x) + f(-x)g'(x) = -f(-x)g(x) + f(-x)g(x) = 0$$

Donc p est constante et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = p(0) = 1 \times 1 = 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(-x)}$ (on avait montré que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Or $\frac{1}{f(-x)} = f(x)$ on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ et donc $g = f$. Ainsi la solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ est unique.

1. Il s'agit d'une équation qui lie une fonction inconnue et sa dérivée : on parle d'*équation différentielle*
2. Leonhard Euler (1707-1783) : mathématicien suisse. Un des mathématiciens les plus productifs de tous les temps. Il a travaillé dans beaucoup de domaines (notre trigonométrie moderne provient essentiellement de son *Introductio* de 1748). Il est aussi l'inventeur de beaucoup de notations que nous utilisons encore aujourd'hui (π, Σ pour les sommes, r pour les rayons, A, B, ... pour les sommets d'un polygone, cos et sin, ...)

Définition 10.1 L'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 1$ est appelée fontion exponentielle. Cette fonction est notée $\exp : x \mapsto \exp(x)$.

2. Propriétés et étude de la fonction exponentielle

A. Propriétés algébriques

Propriété 10.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(x) > 0$.

Cette propriété a été démontrée au cours de la preuve du théorème 10.1.

Propriété 10.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

1) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$;
2) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
3) $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
4) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

Démonstration 1) Soit y un réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $h'(x) = \frac{\exp(x+y)\times\exp(x)-\exp(x+y)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$.
Donc h est constante et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = h(0) = \exp(y)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

2) Dans la preuve du théorème 10.1, on a montré que pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\exp(x)\exp(-x) = 1$; d'où le résultat.

3) On écrit :

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

4) • Soit $p \in \mathbb{N}$. La proposition « $\exp(px) = (\exp(x))^p$ » est vraie au rang $p = 0$.
On fait l'hypothèse que cette proposition est vraie pour un rang p fixé dans $\mathbb{N}$; montrons qu'elle est vraie au rang $p + 1$:

$$\exp((p + 1)x) = \exp(px + x) = \exp(px)\exp(x) = (\exp(x))^p \times \exp(x) = (\exp(x))^{p+1}$$

Donc d'après l'axiome de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

• Enfin, si $p \in \mathbb{Z}$ avec $p < 0$ on a $-p \in \mathbb{N}$. Or :

$$\exp(px) = \exp(-(-px)) = \frac{1}{\exp((-p)x)} = \frac{1}{(\exp(x))^{-p}} = (\exp(x))^p$$

Remarque 10.1 Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\exp(px) = (\exp(x))^p$. En prenant $x = 1$ et en posant $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2,71828$ on peut donc écrire : pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $(p) = \mathrm{e}^p$.
On convient de généraliser cette notation à $p \in \mathbb{R}$ (qu'on note alors x) et on écrit alors :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Remarque 10.2 La propriété 10.2 s'écrit alors, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y; \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}; \quad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}; \quad \mathrm{e}^{px} = (\mathrm{e}^x)^p$$

Exemple 10.1 (Exercices)

1. Simplifier $(\exp(3x))^5 \times (\exp(x))^4$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 = 0$.
3. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1 = 0$.
4. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 3 = 0$.
5. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ est impaire.

B. Étude de la fonction exponentielle

Variations :
La fonction exponentielle est, par définition, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 6.1).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ (par définition et d'après la propriété 10.1) ; donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

Limites :

Propriété 10.3 $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$

Démonstration **ROC : Démonstration à savoir refaire**
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. D'après les variations de $\exp$ on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) \geq 0$ donc $\mathrm{e}^x \geq x + 1$. Or $\lim_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$ donc d'après la propriété 5.5 de comparaison de limites on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ donc :

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = 0$$

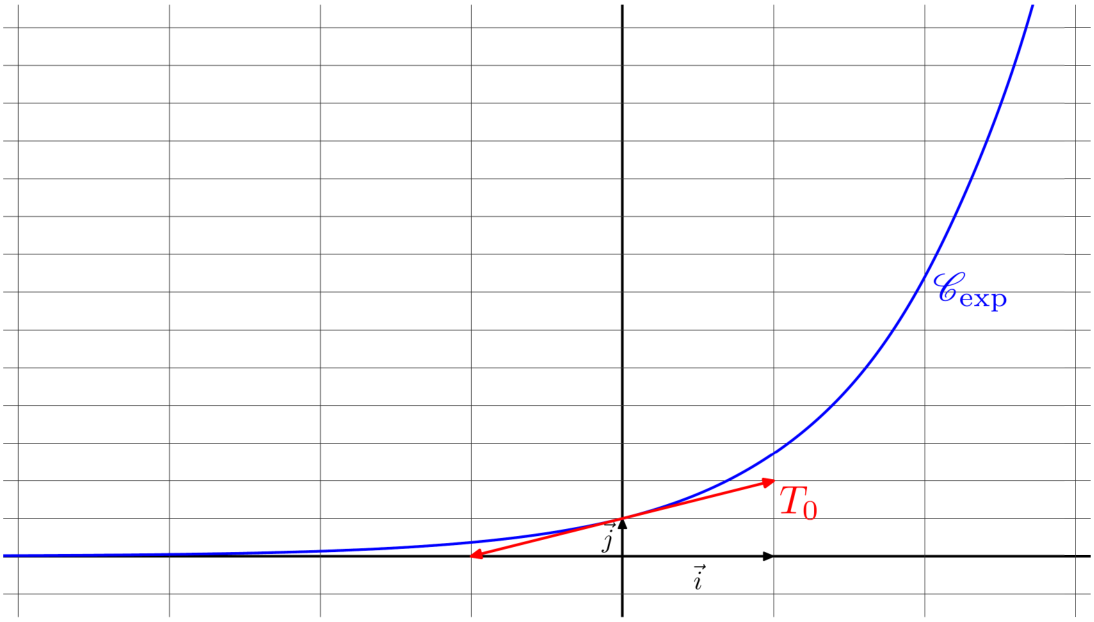
Dons (Ox) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_{exp}$ en $-\infty$. On peut compléter le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Approximation affine en 0 :
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_{\exp}$ au point d'abcsisse 0 est :

$$T_0 : y = x + 1$$

Courbe représentative :



C. Application : équations - inéquations

Propriété 10.4 Soit x et y deux réels.

$$e^x = e^y \iff x = y \quad \text{et} \quad e^x < e^y \iff x < y$$

Démonstration On utilise le théorème de la valeur intermédiaire (théorème 6.4 page 56) :

- la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- on a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;
- pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $e^y > 0$ donc $e^y \in \exp(\mathbb{R})$.

Donc l'équation d'inconnue x, $e^x = e^y$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et cette solution est clairement $x = y$.
Donc : $e^x = e^y \iff x = y$.

Exemple 10.2 Résoudre :

$$e^x - e^{-x} = 0, \quad e^x - e^2 > 0, \quad e^{2x+3} - 2e^{x+7} + e^{11} = 0, \quad e^{x^2+2} < \left(e^{(x+4)}\right)^2$$

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} = 0 &\Leftrightarrow e^x = \tfrac{1}{e^x} \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow e^(x) = 1 \text{ ou } e^x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x - e^2 > 0 &\Leftrightarrow e^x > e^2 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2x+3} - 2e^{x+7} + e^{11} = 0 &\Leftrightarrow e^3\left(e^{2x} - 2e^{x+4} + e^8\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^xe^4 + \left(e^4\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^x - e^4\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = e^4 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{x^2+2} < \left(e^{x+4}\right)^2 &\Leftrightarrow e^{x^2+2} < e^{2x+8} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2 < 2x + 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 < 0 \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = 28 > 0$ donc deux racines : $\alpha = 1 - \sqrt{7}$ et $\beta = 1 + \sqrt{7}$. Finalement la dernière inéquation équivaut à $x \in]\alpha\,;\,\beta[$.

Exemple 10.3 Étudier le signe de $e^{2x} - e^{x+\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^{x+\frac{1}{2}} \geq 0 & \Leftrightarrow e^{2x} \geq e^{x+\frac{1}{2}} \\ & \Leftrightarrow 2x \geq x + \tfrac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow x \geq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

D. Fonction composée

Théorème 10.2 Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $f : x \mapsto e^{u(x)}$.
La fonction f est dérivable sur I et pour $x \in I$ on a $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.
On note aussi : $(e^u)' = e^u \times u'$.

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème 8.1 (dérivation des fonctions composées).

Exemple 10.4 Étudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x^2+x-1}$.

E. Limites à connaître

Propriété 10.5

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration Pour $x > 0$ on a $\frac{e^x}{x} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$.
Or pour tout x, on a $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2} + 1 > \frac{x}{2}$. Donc :

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}, \text{ et donc, } \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2 > \frac{x}{4}$$

Enfin, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc d'après la propriété 5.5 de comparaison des limites, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Pour la deuxième limite :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{-X}{e^X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$

3. Synthèse du chapitre

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....